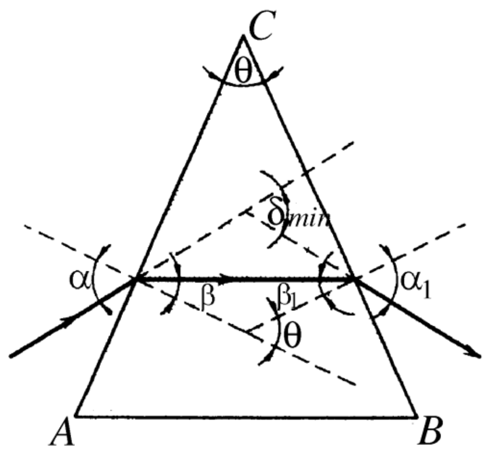
Određivanje minimalnog ugla devijacije (skretanja) zraka na prizmi

Za prelamanje svetlosnog zraka na prizmi je pokazano da važe sledeće veze između karakterističnih uglova (na slici 1.):

$$\delta = \alpha + \alpha_1 - \theta; \qquad \theta = \beta + \beta_1 \qquad (1)$$

gde su α, α_1 upadni i prelomni ugao zraka pri upadu na i izlasku zraka iz prizme, θ ugao prizme, a δ ugao devijacije (skretanja) zraka posle prelamanja u odnosu na pravac upadnog zraka. Postavlja se pitanje pri kojim će uslovima ugao devijacije zraka biti minimalan. Na osnovu prve jednakost u (1), ugao devijacije je funkcija upadnog ugla α (jer je θ konstanta, a α_1 je takođe odrfeđeno upadnim uglom), te odatle sledi da treba naći prvi izvod te funkcije i izjednačiti ga sa nulom.



Slika 1. Geometrija za izračunavanje minimalnog ugla devijacije

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{d\alpha} + \frac{d\alpha_1}{d\alpha} - \frac{d\theta}{d\alpha} = 0; \quad \theta = \beta + \beta_1$$
$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha} = -1 \qquad (2)$$

gde smo uzeli u obzir da je ugao θ konstantan i da je izvod α po samom sebi jednak jedinici. Ako sada iskoristimo vezu između uglova θ, β, β_1 dobijamo:

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = 0; \quad \theta = \beta + \beta_1$$
$$\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d\beta_1}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{d\beta_1}{d\alpha} \Rightarrow \frac{d\beta_1}{d\beta} = -1 \qquad (3)$$

Posmatrajmo prelamanje zraka svetlosti na prilikom upada na prizmu, na osnovu Snelijus Dekartovog zakona sledi (za prizmu od stakla indeksa prelamanja *n* u vazduhu):

$$1 \cdot sin\alpha = n \cdot sin\beta \Longrightarrow cos\alpha \cdot d\alpha = ncos\beta \cdot d\beta \qquad (4)$$

dok zakon prelamanja za zrak koji napušta prizmu daje sledeću vezu:

$$n \cdot sin\beta_1 = 1 \cdot sin\alpha_1 \Longrightarrow n \cdot cos\beta_1 d\beta_1 = cos\alpha_1 \cdot d\alpha_1 \qquad (5)$$

Deljenjem poslednjih jednakosti u izrazima (4) i (5) dobijamo sledeći odnos:

$$\frac{cos\alpha_1 \cdot d\alpha_1}{cos\alpha \cdot d\alpha} = \frac{cos\beta_1 d\beta_1}{cos\beta \cdot d\beta} \Longrightarrow \frac{cos\alpha_1}{cos\alpha} = \frac{cos\beta_1}{cos\beta} \qquad (6)$$

gde smo iskoristili poslednje jednakosti u relacijama (2) i (3). Ako sada u poslednju jednačinu u (6) uvedemo trigonometrijski identitet $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$, iskoristimo vezu između sinusa upadnih i prelomnih uglova koju daje zakon prelamanja, a zatim kvadriramo tako dobijen izraz, dolazimo do:

$$\frac{1 - sin^2\alpha}{1 - sin^2\alpha_1} = \frac{n^2 - sin^2\alpha}{n^2 - sin^2\alpha_1} \qquad (7)$$

Očigledno je da će poslednja jednakost biti zadovoljena ako je $n = 1$, što bi značilo da je prizma od vazduha (nema prizme) ili ako je prelomni ugao $\alpha_1 = \alpha$ jednak upadnom uglu zraka na prizmu. Kao posledica jednakosti uglova $\alpha_1 i\ \alpha$ sledi i jednakost uglova $\beta_1 = \beta$. Na osnovu izraza (1) sledi da je minimalni ugao devijacije dat sa:

$$\delta_{min} = 2\alpha - \theta; \ \Rightarrow \alpha = \frac{\delta_{min} + \theta}{2} \quad i \quad \beta = \beta_1 = \frac{\theta}{2} \qquad (8)$$

Na osnovu geometrijske šeme date na slici 1, očigledno je da će se pri jednakim uglovima $\beta\ i\ \beta_1$ zrak prostirati kroz prizmu paralelno sa njenom osom, što je jedan od načina da eksperimentalno odredimo uslov za minimalnu devijciju.

Ako sada primenimo Snelijus-Dekartov zakon za upadni zrak i odatle izrazimo indeks prelamanja prizme, dobija se:

$$n = \frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{sin\frac{\delta_{min} + \theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow za\ male\ uglov\ n \approx \frac{\delta_{min} + \theta}{\theta} \qquad (9)$$

Iz poslednje jednakosti sledi i jedna zanimljiva veza koja važi kod optičkih klinova (imaju male uglove θ):

$$\delta_{min} = \theta\ (n - 1) \qquad (8)$$

Koja se često koristi kod definisanja veličina važnih za disperziju svetlosti, što će biti dato u nastavku.